ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1991

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

OPTION M

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Notations

- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n de termes réels, n est un entier, $n \geq 1$.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera muni de la norme euclidienne, c'est-à-dire, en désignant les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par des matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sera muni de la norme d'opérateur associée, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \sup\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.
- Il sera admis que pour tout couple de matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ a lieu.

Partie I
Quelques propriétés de l'exponentielle de matrices

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Établir que la série de matrices de terme général U_k défini par $U_0 = I_n$, $U_k = \dfrac{1}{k!}A^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ est convergente.

Soit $\exp(A)$ la somme de cette série : $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

(b) Démontrer l'inégalité : $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$

(c) Établir la relation : $B\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k$.

Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer sur les matrices $\exp(A_1)$ et $\exp(A_2)$, lorsque A_1 et A_2 sont deux matrices semblables ?

2. Il sera admis que si deux matrices A et B commutent, alors :

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

Soient les trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(D)$ et $\exp(F)$, comparer $\exp(E)$ et le produit $\exp(D)\exp(F)$.

3. Soit f_A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $f_A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$.

(a) Établir que f_A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Exprimer, en fonction de $f_A(x)$ et de I_n, l'expression $A \displaystyle\int_0^x f_A(t)\mathrm{d}t$ où x est un réel, en déduire que la fonction f_A, est dérivable et calculer sa dérivée.
Montrer que f_A, est indéfiniment dérivable.

4. (a) Soit θ un réel donne et soit C_θ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: $C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $\exp(C_\theta)$. Est-ce que l'application $A \mapsto \exp A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est injective ?

(b) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que la matrice $\exp(A) - I_n$ peut s'écrire $A(I_n + S_A)$. Établir qu'il existe un réel α ($\alpha > 0$) tel que $\|A\| < \alpha$ implique $\|S_A\| < 1$.

(c) Soit T une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, établir que si $\|T\| < 1$, la matrice $I_n + T$ est inversible (démontrer par exemple que le seul vecteur X de $\mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X$ est nul, est le vecteur nul).

(d) Soit M une matrice appartenant à la boule ouverte $B(O, \alpha)$ de centre la matrice nulle O et de rayon α, α est le réel défini dans à l'alinéa (b), établir que l'égalité entre les matrices $\exp(M)$ et I_n est équivalente à la nullité de M.

5. Soient B et H deux matrices données de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit k un entier, $k \geq 1$; soit g_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$g_k(x) = (B + xH)^k.$$

Les deux matrices B et H ne sont pas supposées commutables.

(a) Établir que la fonction g_k est continûment dérivable ; calculer les dérivées des fonctions g_1, g_2, g_3 puis de la fonction g_k.

(b) En déduire l'inégalité :

$$\|(B + H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$

6. Soit x un réel, $x > 0$, soit $T(A, x)$ la matrice définie par la relation :

$$T(A, x) = \frac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA).$$

(a) Démontrer que la fonction $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge par continuité en 0. Donner un majorant simple de sa norme en utilisant l'expression de $T(A, x)$ au moyen d'une intégrale (par exemple).

(b) Soit k un entier, $k \geq 1$, en remarquant la relation :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp(A) = \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right]^k - \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right]^k$$

et en utilisant l'inégalité établie en $I.5.$, déterminer la limite de la suite de matrices de terme général :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

(c) Démontrer que l'application $A \mapsto \det A$ ($\det A$ est le déterminant de A) est une application continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer le développement limité en $\dfrac{1}{k}$ de $\det\left(I_n + \dfrac{1}{k}A\right)$, contenant les deux premiers termes.
En déduire la valeur du déterminant de la matrice $\exp(A)$.

7. Soit x un réel, $x > 0$. Soit $U(A, B, x)$ la matrice définie par la relation :

$$U(A, B, x) = \frac{1}{x^2}(\exp(xA).\exp(xB) - I_n - x(A + B)).$$

(a) Démontrer que la fonction $x \mapsto U(A,B,x)$ se prolonge par continuité en 0, donner un majorant de sa norme.

(b) Soit k un entier, $k \geq 1$, déterminer, lorsque k croît indéfiniment, la limite de l'expression :

$$P_k = \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right]^k - \left[I_n + \frac{1}{k}(A+B)\right]^k.$$

(c) En déduire, lorsque k croit indéfiniment, la limite de la suite des matrices :

$$Q_k = \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right]^k.$$

Partie II

Groupes à un paramètre

Soit G un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, G est dit groupe à un paramètre s'il existe un morphisme continu et surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ dans G, G est muni de la distance induite par la norme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but de cette partie est de montrer, après avoir donnée l'exemple du sous-groupe $f_A(\mathbb{R})$, que tout sous-groupe à un paramètre est de ce type.

1. Démontrer que, pour une matrice A donnée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application f_A est un morphisme continu du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, en déduire que $f_A(\mathbb{R})$ est un groupe à un paramètre.

2. Démontrer que le groupe $\mathscr{O}_+(2)$ des matrices orthogonales de déterminant 1 est un groupe à un paramètre. Déterminer une matrice A telle que $f_A(\mathbb{R})$ soit $\mathscr{O}_+(2)$.

3. Soit α un rel strictement positif, donner un exemple de fonction g_α positive continûment dérivable, définie sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$ et telle que :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\mathrm{d}u = 1.$$

Vérifier brièvement que les fonctions g_α et g'_α sont uniformément continues sur toute la droite réelle.

Soit Φ un morphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, continu pour la distance induite dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ par la norme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soient M_α, et, pour tout rel t, $\psi(t)$ les matrices définies par les relations :

$$M_\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(u)\Phi(-u)\mathrm{d}u, \qquad \psi(t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g(t-u)\Phi(u)\mathrm{d}u.$$

4. (a) Soit t_0 un réel donné ($t_0 > 0$), démontrer que si $t \in [-t_0, t_0]$, on a :

$$\psi(t) = \int_{-t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} g(t-u)\Phi(u)\mathrm{d}u.$$

(b) Démontrer que la fonction $\psi : t \mapsto \psi(t)$, définie dans $\mathbb{R}$, est continûment dérivable

(c) Établir les relations : $\psi(t) = M_\alpha\Phi(t) = \Phi(t)M_\alpha$.

5. (a) Démontrer que la matrice M_α admet une limite, lorsque le rel α tend vers 0.

(b) Montrer qu'il est possible de choisir α de façon que M_α soit inversible.

(c) En déduire que le morphisme Φ, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, est continûment dérivable.

6. (a) Désignons par A la matrice $\Phi'(0)$. Calculer $\Phi'(t)$.

(b) En fonction $\Phi(t)$. Justifier le résultat.

PARTIE III

Algèbres de Lie

Une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel $\mathscr{A}$ réel muni de la loi de composition interne, notée $[.,.]$, de $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$: $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ possédant les propriétés P :

$P_1 : (X, Y) \mapsto [X, Y]$ est une application bilinéaire

$P_2 : \forall (X, Y) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A},\ [X, Y] = -[Y, X]$

$P_3 : \forall (X, Y, Z) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A},\ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$

Le but de cette partie est de donner des exemples d'algèbres de Lie et de montrer qu'une algèbre de Lie peut être construite à partir d'un groupe.

1. Démontrer que l'espace vectoriel de toutes les matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Lie lorsque la loi de composition interne $[.,.]$ est l'application :

$$(A, B) \mapsto AB - BA.$$

2. Démontrer que l'espace vectoriel E des matrices de trace nulle et l'espace vectoriel F des matrices antisymétriques sont des algèbres de Lie pour cette même loi de composition $[.,.]$.

3. Soit G un sous-groupe du groupe $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit g l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que l'espace image $f_A(\mathbb{R})$ soit contenu dans G :

$$g = \{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid f_A(R) \subset G \}.$$

(a) Démontrer que l'ensemble g n'est pas vide.

(b) Démontrer que g est un espace vectoriel réel.

(c) En admettant la propriété : pour tout couple de matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(AB - BA)$ est la limite lorsque l'entier k croit indéfiniment de la suite des matrices :

$$\left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\exp\left(-\frac{1}{k}A\right)\exp\left(-\frac{1}{k}B\right)\right]^{k^2},$$

établir que g est une algèbre de Lie .

4. Soit G l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de déterminant égal à 1 (c'est-à-dire $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$).
Démontrer que G est un sous-groupe fermé, déterminer l'algèbre de Lie g.

5. Soit g l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques (question III.2.), montrer que pour toute matrice antisymétrique A. il existe une relation simple entre la matrice $\exp A$ et sa matrice transposée ${}^t(\exp A)$. En déduire un sous-groupe G fermé qui peut servir à construire g comme dans la question III.3. .

FIN DU PROBLÈME